Uguale
è un segno di relazione o un indicatore di procedura?

Camici C., Cini A., Cottino L., Dal Corso E., D'Amore B., Ferrini A., Francini M., Maraldi A.M., Michelini C., Nobis G., Ponti A., Ricci M., Stella C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 25, 3, 255-270.

Cristina Camici (San Giovanni Valdarno, Ar), Annalisa Cini (Arezzo), Luigina Cottino (Milano), Erminia Dal Corso (Verona), Bruno D'Amore (Bologna), Attilio Ferrini (San Giovanni Valdarno, Ar), Margherita Francini (Arezzo), Anna Maria Maraldi (Cesena, Fo), Carla Michelini (San Giovanni Valdarno, Ar), Giancarla Nobis (Milano), Adriana Ponti (Milano), Mirella Ricci (Milano), Chiara Stella (Verona).

RSDDM

[Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica e di Divulgazione della Matematica]

c/o Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

damore@dm.unibo.it

Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca dell'Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi MIUR.

Summary. *In this paper we analyse the replies of primary and secondary school students when asked to complete the statement: 11 – 6 = ? – 11. This problem is well known in international literature, but we examine it from a different aspect, deciding if the students choices are hiding didactic obstacles. More precisely if the replies indicate special interpretations of the equals sign. Although this type of analysis is often found in the literature, it seems to us that the result of a specific analysis that includes direct interviews might also say something more, also taking into account the "vertical" vision of our analysis.*

1. Il quadro teorico di ricerca

È stato ampiamente rilevato dalla ricerca internazionale, ritenuta oramai classica, che lo studente ha, nei confronti dell'uguaglianza, un comportamento cognitivo diverso da quello atteso dall'insegnante, specie all'ingresso nel ciclo di studio superiore.
Tale comportamento cognitivo diverso assume varie sfaccettature, ma noi ci concentreremo solo su un dualismo "classico": mentre l'insegnante pensa all'uguaglianza come ad una relazione binaria di equivalenza, lo studente la vede fin dalla scuola elementare (e poi non se ne discosta più, anche se acquisisce altri usi ed altre interpretazioni dello stesso concetto) come un "segno direzionale", orientato da sinistra verso destra, dunque un indicatore procedurale che ha a sinistra gli "operandi" ed a destra (preferibilmente) un numero unico, il "risultato" (Kieran, 1988).
Tanto è vero che:

- l'allievo di scuola elementare tende a rifiutare una scrittura del tipo 7=2+5 o per lo meno tende a dichiarare che è stato scritto "alla rovescia"; in effetti, prove sulle sollecitazioni 2+5=? e 2+?=7 danno risultati nelle prestazioni estremamente differenti, a nettissimo vantaggio della prima;
- si considera "errore tipico dello studente" anche senza veri e propri riferimenti bibliografici specifici (si veda comunque: Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994), la risposta "5" o "6" che lo studente dà, di fronte alla richiesta di risolvere l'equazione 11-6=□-11 (lo stimolo esatto è: "Metti al posto del quadrettino il numero che verifica l'uguaglianza"); la risposta "5", per l'appunto, sarebbe legata alla procedura; la risposta "6" ad una sorta di simmetria, forse determinata dall'immagine della matematica o forse proprio legata ad una lettura del segno = come relazione simmetrica, per quanto confusa (anche il termine italiano "simmetrico" è, d'altra parte, ambiguo).

Non si pensi che tale questione (uso non relazionale del segno di uguaglianza) debba ritenersi esclusivamente relativa a giovani studenti alle prime armi; Clement, Lockhead, Soloway (1979), Clement, Lockhead, Monk (1981) e Clement (1982) sono solo alcuni degli studi, scelti da noi come quelli più classici, che testimoniano che perfino studenti del I anno del corso di laurea in Ingegneria, nel risolvere problemi di designazione (dunque di tipo semantico) usano il segno di uguaglianza in maniera ambigua, oscillando tra le due interpretazioni.

2. I problemi e le domande di ricerca

Sulla base di questa situazione stabilita dalla ricerca e dalla verifica nella prassi didattica quotidiana (tutti gli autori di questo articolo sono docenti di scuola, tranne uno che è docente all'università), ci siamo posti vari problemi. Li raccogliamo in 3 tipologie e li esplicitiamo in questo stesso paragrafo, sotto forma di domande.

P1. Questa situazione si determina durante la frequenza della scuola elementare? Nel senso: ci sono già bambini durante la scuola elementare che oscillano tra le due interpretazioni, o l'uguaglianza nella scuola elementare è tutta (o quasi tutta) di tipo procedurale?

P2. Nel caso dell'equazione 11-6=□-11 vista sopra, oltre alle classiche risposte 5 o 6, ve ne sono delle altre? Quali? Determinate da quali giustificazioni? Solo alla scuola elementare o anche alla scuola superiore? Su questo tema non abbiamo trovato risposta nelle ricerche classiche citate, ma ci sembrava interessante conoscere altre possibili risposte e le loro giustificazioni.

P3. La risposta errata all'equazione detta dipende dalla formulazione dell'equazione stessa? Cioè: si potrebbero trovare altre scritture per le quali si hanno risultati diversi?

Queste tre domande di ricerca comportano la necessità che le nostre prove non si svolgano solo nella scuola media superiore, ma bensì principalmente nella scuola elementare.

3. Le ipotesi della ricerca

Le risposte che noi davamo, in una fase preliminare, alle domande precedenti, erano le seguenti che chiameremo Ipotesi. Esse sono strettamente relazionate alle domande precedenti, nel senso che Ii, per $1 \leq i \leq 3$, era la nostra ipotesi relativa al problema-domanda Pi.

I1. A nostro avviso, la situazione si determina nella scuola elementare ed ha alla base un errore strategico, quello effettuato dall'insegnante nell'insistere e confermare solo un uso procedurale dell'uguaglianza, senza suggerire nella prassi didattica l'interpretazione relazionale. Questa ipotesi sarebbe confermata proprio se avessimo la conferma sperimentale che la stragrande maggioranza degli studenti di scuola elementare vede l'uguaglianza come procedura e se però ci fossero anche studenti (anche pochissimi) che danno una risposta relazionale. Questo significherebbe allora o che l'insegnante ne ha trattato esplicitamente (e di questo dovremmo chiedere conferma agli sperimentatori) o che essa può in casi rari essere assunta implicitamente.

I2. Per quanto concerne le possibili risposte alternative a 5 o 6 relativamente alla consegna di risolvere l'equazione 11-6=□-11, si sono fatte varie ipotesi, tra le quali ovviamente la (auspicata) 16; ma molti insegnanti, specie elementari, vedevano possibili varie risposte anche senza logica apparente. A fatica dunque, e con varie discussioni, abbiamo redatto un insieme di "risposte attese", ma con tentativi di giustificazione diversi ed (onestamente) un po' vaghi. Su questo problema abbiamo preferito non fare vere e proprie ipotesi. Di certo, però, gli insegnanti di scuola superiore prevedevano anche nelle loro classi o in quelle dei colleghi risposte diverse da 5 o 6.

I3. Eravamo convinti che fosse soprattutto la forma in cui si presentava quell'equazione a determinare in maniera così massiccia il risultato. Abbiamo così elaborato altre equazioni dello stesso tipo, ma meno critiche, come 5+3=6+□ o anche con operazioni diverse dall'addizione, come 2×9=□×3, per le quali prevedevamo risultati più vicini ad un uso relazionale dell'uguaglianza.

Nota.
Avvertiamo il lettore del seguente fatto. Il numero di protocolli raccolti ed il numero delle interviste effettuate in questa ricerca è talmente vasto che NON riporteremo tutto qui; ci limiteremo in questa occasione solo a fornire il quadro ristretto dei risultati che riteniamo peculiari o più significativi, con commenti circostanziati e sunti poco dettagliati. Il materiale di ricerca è naturalmente disponibile presso il RSDDM all'indirizzo indicato e presso ciascuno dei ricercatori, autori di questo articolo.

4. La metodologia della ricerca

Ciascuno degli autori di questo articolo (tranne uno) ha effettuato prove o nella propria classe o (per lo più) in classi "parallele", proponendo per iscritto il seguente stimolo:

11-6=□-11 Metti al posto del quadrettino il numero che verifica l'uguaglianza

In alcuni casi, la consegna è stata scritta alla lavagna e gli allievi dovevano per prima cosa ricopiarla su un foglio A4 bianco.
In ogni caso sul foglio andava annotato il nome dell'allievo.
Gli studenti avevano la consegna del silenzio e di lavorare ciascuno per proprio conto ed esse sono state ampiamente rispettate, grazie alle raccomandazioni ed alla sorveglianza dei ricercatori. In ogni classe, durante la prova c'erano sempre almeno 2 insegnanti (un ricercatore ed un altro insegnante; talvolta erano presenti 2 ricercatori ed un altro insegnante).
Gli studenti sono stati invitati a non usare bianchetto o coprente, ma a cancellare in caso di ripensamento.

Sono stati coinvolti in totale 336 allievi, così distribuiti:

TOTALI:

II elementare: 88 allievi
III elementare: 145 allievi
IV elementare: 48 allievi
TOTALE ELEMENTARI: 281

I superiore: 55 allievi

TOTALE GENERALE: 336

Solo agli studenti di IV elementare e di I superiore è stata aggiunta la richiesta di spiegare per iscritto il perché della risposta.

Una volta raccolti i protocolli, il ricercatore immediatamente selezionava le risposte e passava ad interviste (sempre individuali). Sono state effettuate in totale 192 interviste alle elementari e 21 alle superiori, per un totale di 213 interviste. Delle 192 interviste alle elementari, 84 sono state registrate e poi trascritte; delle altre 108 si hanno solo appunti redatti durante lo svolgimento. Delle interviste alle superiori abbiamo solo gli appunti redatti.
Due note:

- La prova effettuata alle superiori era molto più articolata e complessa e l'equazione oggetto della verifica principale era inserita in un contesto più ampio. In verità, alle superiori sono state fatte più prove nel tempo. Quelle delle quali ci serviamo nella redazione di questo articolo sono quelle che possiamo considerare finali.
- Alcune delle prove effettuate alle elementari erano più vaste; ma ci serviamo qui solo di quelle strettamente connesse a questa ricerca. Non è escluso, anzi auspicabile, che, nell'àmbito della problematica qui

discussa, insegnanti - ricercatori che hanno fatto l'esperienza, singolarmente o in gruppi, decidano di rendere noti i risultati delle loro prove in studi successivi.

Nelle interviste si chiedeva agli allievi di giustificare le risposte date, sia che queste fossero tra quelle attese, e dunque solo per avere riscontri alle attese, sia che queste fossero del tutto diverse, dunque per avere spiegazioni su scelte non attese dai ricercatori. Spesso si chiedeva agli intervistati di commentare la giustificazione che essi stessi avevano dato per iscritto.
I ricercatori raccoglievano il materiale (protocolli degli allievi e protocolli di intervista) e questo materiale, molto articolato e ricco, veniva consegnato ad uno dei membri del gruppo, che lo ha a lungo esaminato. Nel caso di incertezze, questi dialogava con ciascuno degli altri ricercatori, per capire bene certe note, certe affermazioni, certe considerazioni.
In seguito ad una discussione collettiva ed a verifiche private, l'articolo veniva ri-redatto in modo da assicurare che fosse rispondente al punto di vista di tutti, specie nelle valutazioni e nelle conclusioni.
In questo articolo ci serviremo delle interviste solo nel commentare i risultati.

5. I risultati della ricerca

Analizziamo nella seguente tabella le risposte quantitative assolute e percentuali ottenute nelle scuole elementari:

Risposte →	**16**	**5**	**6**	**0**	**14 o 15**	**-6**	**4**	**non risp**	**altre**
II	1	69	3	2	2	0	0	0	11
III	6	120	8	0	0	5	1	1	4
IV	6	40	0	0	0	0	0	0	2
Totali:	13	229	11	2	2	5	1	1	17
%	4.5	81.5	4	1.5	1.5	2	0.25	0.25	4.5

La situazione si presenta in modo piuttosto evidente:

- *risposta procedurale*: la stragrande maggioranza delle risposte (81.5%) è rivelatrice di un comportamento procedurale; 11-6 "fa" 5 e questo si *deve* scrivere dopo il segno =, quale che sia la situazione, anche in presenza di quello "strano" –11 che però non sconcerta affatto (ma rimandiamo a dopo i commenti desunti dalle interviste; tra virgolette abbiamo posto termini usati dagli intervistati)

- *risposta relazionale*: la risposta corretta (16), legata ad un'interpretazione procedurale dell'uguaglianza, per quanto in misura percentuale minima, tuttavia appare, non è del tutto assente; si potrebbe anche pensare che le risposte "14" e "15", presenti in 2 protocolli, siano errori di calcolo che avrebbero voluto essere dei "16"; noi le interpreteremo così (il risultato percentuale non varia molto, passa dal 4.5% al 6%)
- *risposta simmetrica*: le risposte "6", legate all'interpretazione simmetrica, costituiscono una percentuale bassa ma interessante (4%); ad esse noi aggiungiamo, nella stessa categoria, anche le risposte "–6" (2%) che, ancora di più, sembrano essere l'espressione di una ricerca di espressione di simmetria, per un totale che raggiunge il 6%.

Possiamo dunque riassumere i risultati percentuali come segue:

procedurale 81.5%
relazionale 6%
simmetrica 6%

Un valore percentuale piuttosto rilevante (6.5%) sembra essere quello delle risposte che abbiamo classificato come "altre" (le risposte 0, 4 e le altre); esse sono d'altra parte così varie e variegate, da non averne 2 uguali, a parte 0, tant'è vero che quando ciò è successo (si veda la colonna con la riposta "0") le abbiamo esplicitate. Si noti, tuttavia, che, di queste 20 risposte "varie", ben 13 sono in II elementare ed è ragionevolmente pensabile che ciò dipenda dalla giovane età degli allievi che potrebbero anche non aver compreso la consegna.

Esaminiamo ora le percentuali dei risultati della proposta di lavoro scritta ottenuti in I superiore:

procedurale 3.5%
relazionale 67%
simmetrica 23.5%

Tanto per fare un paragone percentuale:

	scuola elementare	scuola superiore
procedurale	81.5	3.5
relazionale	6	67
simmetrica	6	23.5
differenti	6.5	6

6. Discussione dei risultati

Risulta ovvio che la maturità dovuta all'età ed all'acquisizione cognitiva spinge gli studenti di 14 anni a perdere per strada il vizio "procedurale"; e tuttavia il buon risultato percentuale ("solo" il 3.5% cade nell'interpretazione procedurale) è certo dovuto al fatto che gli studenti hanno conosciuto alle medie e rafforzato assai alle superiori la conoscenza delle equazioni.
Si noti tuttavia l'alta percentuale di comportamento "simmetrico", presente *in misura nettamente minore* nella scuola elementare, come se l'aver acquisito competenze matematiche spinga di più a trovare *forme* anziché *sostanze* nelle matematiche cose...

7. Risultati delle interviste

Cerchiamo ora, tra le numerosissime giustificazioni date oralmente nel corso delle interviste agli allievi di scuola elementare, quelle più significative, onde meglio conoscere gli atteggiamenti degli studenti. Per ovvii motivi di brevità, riportiamo solo una rassegna minima di riposte; ma sono a disposizione dei colleghi ricercatori tutti i protocolli.

Giustificazione della risposta procedurale
La risposta procedurale ha giustificazioni ovvie; lo studente dichiara di "aver fatto l'operazione 11-6". Quasi tutti i più piccoli dichiarano di aver visto quello "strano" –11, ma non si sono posti tanti problemi.
Qualcuno dichiara però anche di aver scritto la risposta "5" eseguendo la operazione "alla rovescia"; opportunamente sollecitato dall'intervistatrice, dice che ha "fatto", partendo da destra, 11 meno quel qualche cosa che doveva dare 6" (a sinistra, procedurale), il che lo ha portato a scrivere 5.

Giustificazione della risposta simmetrica
Sembra che la risposta a carattere simmetrico non abbia una giustificazione logica, meglio aritmetica. Gli studenti hanno guardato la scrittura e ne hanno desunto che la richiesta fosse quella di sistemare le cose in modo simmetrico. Le poche giustificazioni formali chiamano in causa una supposta simmetria della sottrazione, ovviamente detta da ogni allievo a modo suo: «Ho fatto 6 perché qui c'era 11-6 [intende dire a sinistra] e allora ho fatto 6-11 [intende dire a destra] tanto è uguale». Emerge allora chiaramente che, *IN DUE forse TRE CASI*, il segno di uguaglianza ha valore di segno relazionale e che quindi la simmetria sia legata alla riconosciuta

simmetria della relazione binaria di uguaglianza. Su questo punto, che percentualmente non modifica i nostri risultati, occorrerebbe tuttavia ulteriormente indagare. Ci viene infatti il dubbio che, tra gli studenti non intervistati, ve ne siano altri per i quali la risposta “6” sia almeno in parte legata in modo confuso alla simmetria dell’uguaglianza.

Giustificazione della risposta relazionale

Gli allievi intervistati tra quelli che danno una risposta relazionale, sono consapevoli di quello che hanno fatto e sanno giustificarlo con una certa qual correttezza. Essi hanno davvero “visto” l’uguaglianza in modo relazionale: «Qui [a destra] doveva essere uguale a qui [a sinistra]».
Una sola considerazione, però decisiva; dei 13 bambini di scuola elementare che danno la risposta corretta “16”, a carattere relazionale, ben 12 provengono da due sole realtà scolastica (Milano) e *dalle stesse due insegnanti*. Intervistate, le insegnanti hanno dichiarato di aver sempre trattato, nella loro azione didattica, proprio questi aspetti diversi dell’uguaglianza. Questa considerazione ci sarà utile nel paragrafo **9** al momento delle conclusioni didattiche.

Giustificazione di risposte differenti

Troppo varie e differenziate per trarne idee di un certo qual peso. Molti bambini si confondono o ammettono di aver eseguito calcoli a caso. Si pensi alla clausola del contratto didattico: “esigenza della giustificazione formale”: Se la maestra mi dà una consegna, io faccio dei calcoli, anche se per me non hanno senso (D’Amore, 1999, 2001).

8. Discussione delle ipotesi e risposte alle domande

I risultati ottenuti [in verità non solo quelli qui esposti, ma anche quelli raccolti in vasta quantità ma qui non esplicitati] ci danno l’idea che molte delle attese che avevamo sono state confermate; è interessante, anche se per noi ovvio, il fatto che l’analisi che segue a prove empiriche dà molte più informazioni che qualsiasi supposta “esperienza”, il che ci conforta nella spinta nella direzione che noi abbiamo da decenni intrapreso che è quella del lavoro *insieme* tra ricercatori-teorici (universitari) e ricercatori-insegnanti (di scuola).
E veniamo alle risposte esplicite alle domande di ricerca; le indicheremo con la sigla Ri, con $0 \leq i \leq 3$, nel senso oramai usuale.

R1. La situazione che spinge all'identificazione funzionale procedurale del segno di uguaglianza inizia certamente nella scuola elementare. Ci sono infatti bambini che oscillano tra le due interpretazioni (procedurale e relazionale), ma la prima è la più massicciamente presente. Possiamo affermare che sia dovuta essenzialmente all'interpretazione che viene fornita dall'insegnante, recepita dal bambino, e poi non ritoccata criticamente più avanti dall'insegnante stesso. Si tratta di un vero e proprio ostacolo didattico.

R2. L'equazione 11-6=□-11 ha una varietà di risposte notevole, oltre alle "classiche" 5 e 6, oltre a quelle ottenute per errore di calcolo, e l'abbiamo visto in un paragrafo precedente. Le giustificazioni fornite ricadono nella clausola del contratto didattico che abbiamo chiamato in passato: *clausola della giustificazione formale*; in caso contrario, tutte le risposte diverse da quelle attese sarebbero delle non risposte, mentre invece le non risposte sono solo 1 su 336. Ci pare invece che sia scarsa o nulla la varietà di risposte ottenute nella scuola superiore; esse si concentrano su pochi casi.

R3. Per rispondere a questa domanda, in molti casi sono state fatte prove diverse da quella sulla quale qui abbiamo tanto insistito. Possiamo, raccogliendo i risultati senza entrare in dettagli, affermare che sì, la formulazione diversa dell'equazione (per esempio: l'eliminazione della coppia di 11 che spinge alla simmetria; il rendere più complessi i calcoli; il cambiare le operazioni) aumenta la concentrazione nell'analisi del compito e comporta di conseguenza un certo qual miglioramento nella prestazione.

9. Conclusioni e note didattiche

A nostro avviso, uno dei motivi di questa multipla interpretazione del segno di uguaglianza potrebbe risiedere nella duplice natura didattica nella quale esso si presenta:

- da un lato, il segno di uguaglianza è presentato nella scuola elementare come puro segno procedurale; a destra c'è (*ci deve essere*) un risultato e null'altro, dunque il segno = appare come il segno finale di un processo;
- dall'altro, pur senza esplicitarlo in modo definitivo, se ne fa un uso relazionale, trattandolo come oggetto in sé.

Ricadiamo dunque nelle maglie del dualismo processo / oggetto [Skemp (1971), ma soprattutto Sfard (1991)]: un concetto matematico (rappresentato spesso da un segno) viene a lungo (nella storia / nella didattica) usato come puro processo o come indicatore di un processo; fino a che non lo si considera come oggetto lui stesso meritevole di attenzione teorica; questo passaggio:

- nella storia produce un avanzamento teorico
- nella didattica può provocare irrigidimenti a causa di ostacoli didattici (legati alle scelte degli insegnanti dei corsi propedeutici) e certo epistemologici.

Si pensi all'esempio delle equazioni, usate fin dai tempi più remoti (Sumeri, Egizi, dunque prima del 2000 a.C.) come strumento procedurale per risolvere problemi, senza una "teoria delle equazioni"; e poi diventate oggetto esse stesse di studio, dunque teoria, solo nel Rinascimento in Italia prima e poi in Francia (Cardano, Tartaglia, Dal Ferro, Ferrari, Bombelli fino a Descartes). Una volta deciso che l'equazione era interessante come oggetto in sé, è nata una vera e propria teoria delle equazioni e questo strumento, diventato oggetto, ha fatto un balzo improvviso d'importanza nella matematica. Avendo dovuto aspettare 3500 anni o forse più, rivela certamente la presenza di un ostacolo epistemologico (D'Amore, 1999, 2001).

Analogamente a quanto avviene nella storia, anche nel processo di apprendimento cognitivo si deve auspicare e favorire un legame tra concezioni operative e strutturali dello stesso concetto e dunque del segno che lo rappresenta.

Sfard (1991) sottolinea tre momenti:

- *momento della interiorizzazione del processo*, rappresentato dunque da segni o da un segno di carattere procedurale
- *momento della condensazione*: il processo viene condensato in un tutto unico e non più pensato come somma di componenti, dunque una considerazione olistica
- *momento della reificazione*: le singole operazioni computazionali diventano entità permanenti, cioè veri e propri oggetti (oggetti culturali ed oggetti didattici).

Il nostro suggerimento, dunque, è quello di favorire questo processo indispensabile, il che significa portare gli studenti all'analisi dell'uguaglianza, da strumento ad oggetto, non diciamo il più presto possibile, ma lentamente, negli anni, tra la scuola elementare e la scuola media; vogliamo dire di farlo "esplicitamente" come si fa per tanti altri argomenti matematici. D'altra parte, non ci pare un caso che le uniche interpretazioni relazionali (quelle che hanno permesso una risposta corretta alla domanda) provengano dalle classi di quelle due (uniche) insegnanti tra tutti quelli coinvolti, che trattano questo argomento in modo esplicito e critico. A nostro avviso, lo studente non è troppo giovane per capire le cose fondamentali; semmai, potrà dopo essere... troppo vecchio (!) per rimediare a stati cognitivi incancreniti su misconcezioni irrisolubili.

10. Bibliografia

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Quaderno 6, Progetto Strategico del C.N.R. "Innovazioni didattiche per la matematica", Pavia 1994. [Resoconto del IX Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Pisa 5-7 novembre 1992].

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2001). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Kieran C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In: Coxford A.F. (ed.) (1988). *The ideas of algebras*. Yearbook 1988, K-12. Reston: NCTM.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Skemp R.R. (1971). *The psychology of learning mathematics.* Harmondsworth: Penguin Book.